乘法公式

【知识梳理】

平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

完全平方式：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

立方和公式：$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

立方差公式：$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

完全立方式：$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

小火车公式：$a^2+b^2+c^2-ab-ac+bc=\dfrac{(a-b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2}{2}$

【例题演练】

一、计算

（1）$(-m+2n)(2m-n)$

解：原式 $=-2m^2+mn+4mn-2n^2$

$=-2m^2+5mn-2n^2$

（2）$\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}b\right)\left(-\frac{3}{2}a-2b\right)$

原式 $=-a^2-\frac{4}{3}ab+\frac{3}{4}ab+b^2$

$=-a^2-\frac{7}{12}ab+b^2$

（3）$(a-b+c)(a-2b+2c)$

原式 $=[a-(b-c)][a-2(b-c)]$

$=a^2-3a(b-c)+2(b-c)^2$

$=a^2+2b^2+2c^2-3ab+3ac-4bc$

（4）$(-2x+3y)^2$

原式 $=4x^2-12xy+9y^2$

（5）$(-2a-5b)^2$

原式 $=4a^2+20ab+25b^2$

（6）$\left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{3}{2}n^2\right)^2$

原式 $=\frac{4}{9}m^4-2m^2n^2+\frac{9}{4}n^4$

（7）$(4x-2)(2x-1)$

原式 $=2(2x-1)^2$

$=2(4x^2-4x+1)$

$=8x^2-8x+2$

（8）$\left(-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{2}y+\frac{2}{3}x\right)$

原式 $=(\frac{1}{2}y)^2-(\frac{2}{3}x)^2$

$=\frac{1}{4}y^2-\frac{4}{9}x^2$

（9）$(2x+3)(2x-3)(4x^2+9)$

原式 $=(4x^2-9)(4x^2+9)$

$=16x^4-81$

（10）$(3m-2n)(4n^2-9m^2)(2n+3m)$

原式 $=(9m^2-4n^2)(4n^2-9m^2)$

$=-(4n^2-9m^2)^2=-16n^4+72m^2n^2-81m^4$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=13-12=1$

二、知二求二

1、如果 $a^2+b^2=13, ab=-6$，那么 $(a+b)^2=$ 1 .

2、已知 $x^2-2x-1=0$，求：(1) $x-\frac{1}{x}$ (2) $x^2+\frac{1}{x^2}$ (3) $x^3-\frac{1}{x^3}$ (4) $x^4-\frac{1}{x^4}$

解：(1) ∵ $x^2-2x-1=0$

∴ $x-2-\frac{1}{x}=0$

∴ $x-\frac{1}{x}=2$

(2) $x^2+\frac{1}{x^2}=(x-\frac{1}{x})^2+2=6$

(3) $x^3-\frac{1}{x^3}=(x-\frac{1}{x})(x^2+1+\frac{1}{x^2})=2\times(6+1)=14$

(4) $x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2=36-2=34$

3、已知 $x-\frac{1}{x}=-4$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}$ 的值为 14 .

$=(x+\frac{1}{x})^2-2$

3、已知 $x-\frac{1}{x}=-4$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}$ 的值为 14 .

$=(x+\frac{1}{x})^2-2$

三、配方法

1、$9a^2+b^2-6a+4b=-5$，求 a^b 的值.

解：$(3a-1)^2-1+(b+2)^2-4=-5$

$(3a-1)^2+(b+2)^2=0$

∴ $\begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-2 \end{cases}$

∴ $a^b=(\frac{1}{3})^{-2}=9$

2、若 a、b 为有理数，且 $2a^2-2ab+b^2+4a+4=0$，求 a^2b+ab^2 的值.

解：$(a^2+4a)+(a^2-2ab+b^2)+4=0$

$(a^2+4a+4)+(a^2-2ab+b^2)=0$

$(a+2)^2+(a-b)^2=0$

∴ $a=-2$

$b=-2$

a^2b+ab^2

$=ab(a+b)$

$=(-2)\times(-2)\times(-4)=-16$

3、若 a、b 为实数，且 $a^2+3b^2-2ab+4b+2=0$，求 a^2+b^2 的值.

解：$a^2+b^2-2ab+2b^2+4b+2=0$

$(a-b)^2+2(b+1)^2=0$

$a=b=-1$

∴ $a^2+b^2=2$

4、代数式 x^2-4x-3 的最小值是 -7 ； $(x-2)^2-7$

代数式 $-x^2-6x-6$ 的最值为 15 ，此时 $x=$ -3 .

5、当 x 为何值时，$-2x^2+6x-15$ 有最大值，并求出最大值.

解：原式 $=-2(x^2-3x)-15$

$=-2(x-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{2}-15$

$=-2(x-\frac{3}{2})^2-\frac{21}{2}$

当 $x=\frac{3}{2}$ 时，有最大值 $-\frac{21}{2}$

6、求证：无论 x、y 取何值时，$x^2+y^2-2x+12y-40$ 的值都是正数.

证：令 $M = x^2+y^2-2x+12y+40$

$= (x-1)^2-1+(y+6)^2-36+40$

$= (x-1)^2+(y+6)^2+3$

$\because (x-1)^2 \geq 0 \quad (y+6)^2 \geq 0$

$\therefore M \geq 3$

$\therefore$ 无论 x、y 取何值，M 都为正数

四、化简求值

1、$(2x+4)(3x-1)-(2x-3)^2$，其中 $x=\frac{1}{2}$

解：原式 $= 6x^2+10x-4-4x^2+12x-9$

$= 2x^2+22x-13$

将 $x=\frac{1}{2}$ 代入得

原式 $= 2\times(\frac{1}{2})^2+22\times\frac{1}{2}-13 = -2\frac{1}{2}$

2、$2xy(-3x+2y)-(2x-3y)(2x^2+y^2)$，其中 $x=\frac{1}{2}$，$y=-1$

解：原式 $= -6x^2y+4xy^2-(4x^3+2xy^2-6x^2y-3y^3)$

$= \underline{-6x^2y}+4xy^2-4x^3-2xy^2\underline{+6x^2y}+3y^3$

$= -4x^3+2xy^2+3y^3$

将 $x=\frac{1}{2}$，$y=-1$ 代入得原式 $= -4\times(\frac{1}{2})^3+2\times\frac{1}{2}\times(-1)^2+3\times(-1)^3 = -2\frac{1}{2}$

3、$(3x-4y)(4y+3x)-2(x+2y)^2$，其中 $x=-1$，$y=1$

解：原式 $= 9x^2-16y^2-2(x^2+4xy+4y^2)$

$= 9x^2-16y^2-2x^2-8xy-8y^2$

$= 7x^2-24y^2-8xy$

将 $x=-1$，$y=1$ 代入得原式 $= 7\times(-1)^2-24\times1^2-8\times(-1)\times1 = -9$

4、$(2x-y)(4x^2+2xy-y^2)-(2x^2+y)(y^2+4x)$，其中 $x=-1$，$y=1$

解：原式 $= (2x)^3-y^3-2x^2y^2-8x^3-y^3-4xy$

$= 8x^3-y^3-2x^2y^2-8x^3-y^3-4xy$

$= -2y^3-2x^2y^2-4xy$

将 $x=-1$，$y=1$ 代入得

原式 $= -2\times1^3-2\times(-1)^2\times1^2-4\times(-1)\times1$

$= 0$

5、$2\left(\frac{2}{3}m-\frac{1}{2}n\right)\left(\frac{3}{4}m-n\right)-2\left(\frac{1}{2}m-n\right)^2+(m-n)(-n-m)$，其中 $m=2$，$n=3$

解：原式 $= (\frac{4}{3}m-n)(\frac{3}{4}m-n)-2(\frac{1}{4}m^2-mn+n^2)-(m-n)(m+n)$

$= \underline{m^2}-\frac{4}{3}mn-\frac{3}{4}mn-\frac{1}{2}m^2+2mn-2n^2\underline{-m^2}+n^2+n^2$