四色猜想图板拼图的有限元法

李传学

（济南市工业和信息化局　济南　250098）

摘　要：四色猜想的图板微分（无限细分）、任意拼图积分，解决了图论、拓扑学、计算机证明中的“无限”、“飞地”困惑；拼图曲线任意性，可取代拓扑等价来刻画图板微分，四色猜想证明属于数学分析概念。那么，四色猜想又为什么要引入有限元法呢？

遵照“相异相邻、相同（异）对顶”证明规则，“任意地细分”核心在于寻求能用 1、2、3、4 数字标记的数学图形作为表达单元。有限元法的△、田（□）图形单元网格求解思想，直接表达了四色猜想数学语言定义。

本文在解析有限元法适用四色猜想数字单元网格化解基础上，侧重对二阶方阵、四阶对称方阵图板表达式的图板叠加细分，满足拼图边缘 " 相异相邻、相同（异）对顶 " 有边界条件细分图板或无边界条件细分图板的多线段整合拼图单元数字解进行剖析。利用有限元法图解证明四色猜想，并试图拓展四色猜想应用领域。

四色猜想属“历史数学”领域。史前人类面对洪害生存生产方式，集中体现在人的本能与反应—“爱与拼搏”（耿爱英：“爱与拼搏绘人生——走进老科学家袁益让”）。“史前数学”正是求证史前人类文明的工具。

本篇是《四色猜想的数字图板拼图证明与实用意义》《四色猜想的图板微分与拼图积分概念》深化与结论篇。

关键词：图板微分；拼图积分；史前数学；四色图板

中图分类号：O29　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**2832-9317（2023）02-0085-05

DOI：10.12424/HA.2023.036　　**本文链接：**https://www.oc-press.com/HA-202302-085.html

四色猜想“将平面任意地细分为不相重叠的区域，每一区域总可以用 1、2、3、4 这四个数字之一来进行标记，且不会使相邻的两个区域得到相同的数字”数学语言定义，定量与定性相结合概括了四色猜想的性质、特征。

一、四色猜想的有限元法。

有限元法，本质是将数学中的微、积分方法应用于物理模拟中，“分、合”是有限元法的实用思想，分是进行网格单元分析，合是进行求解结果整合。有限单元大小、形状可以任意选择。有限元法有多种计算格式，从数字单元网格的形状来说，有三角形、四边形、多边形网格。任意多边形可以细分为由三角形单元网格构成。四色猜想的图板数字单元△、田（口）与有限元网格一致。

四色猜想的有限元法数字单元网格，即将微分、积分概念应用于四色猜想表达式图板拼图（物理应用）中，来刻画四色猜想定义的“任意地细分”区域单元“相异相邻、相同（异）对顶”（“对顶”状态：“相异对顶”为线，任意点对顶角之和 3600 互补；“相同对顶”点唯一，对顶角之和＜ 3600）规则，整合结果“且不会使相邻的两个区域得到相同的数字”。图板微分与拼图积分规则一致。

作者简介：李传学，济南市工业和信息化局退休人员，泰安市第一批专业技术拔尖人才。

四色猜想微分图板数字单元趋于极限点，线面同一、曲直等价。“事前”标配拼图以直代曲、“事后”标定图板以曲代直。拼图路径（通道标配）是拼图与图板单元相交而成的边缘线。“相异相邻”图板标定对沿线单元分析，通过“拆改、对顶、合并”使微分图板单元数字与拼图数字“相异相邻”。拼图是对图板数字单元网格的验证，并整合多数字单元区域为一体。

“拆改、对顶、合并”是用微分（拆分）、积分（合并）概念来刻画四色猜想（定义的△1面3线对顶链锁）图板“任意地细分”与拼图数字解。

二、四色猜想的网格图板表达式模型与图板、△、☒、□单元网格间的转换。

（一）1、2、3、4数字不同排列组合构成网格图板表达式。

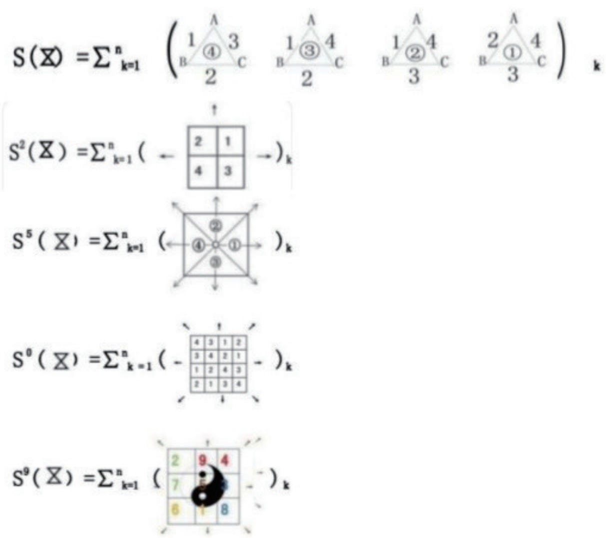
1. 三角形“1面3线”的△网格图板表达式。

2. 二阶方阵的田网格图板表达式。

3. 三角形△“1面3线”组合的☒网格图板表达式。

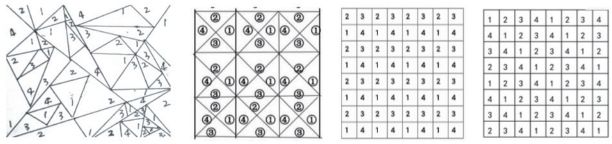
4. 四阶对称方阵的口网格图板表达式。

5. 四方九宫格的田（同二阶方阵）网格图板表达式。



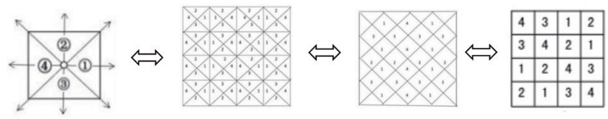
6. 子阵（2×3、3×2、3×3阶）口单元网格图板表达式模型（略）。

（二）△田☒□单元网格“四方八（五）位”链锁表达式图板。



（三）△组合☒与对称方阵口网格转换。

通过对☒的四色共“点”到“线”相邻转换，实现△、☒、口网格同一。



方法是：将1、2、3、4数字标记的△“1面、3线”4种组合的“四方五位”☒单元网格，1800连续翻转（下三右三、或右三下三）后，将☒中数字相邻相同的△网格合并，便转换为四阶对称方阵口形网格。△、田、☒、口单元网格可以相互转化。

三、四色猜想的有限元法数字单元网格求解思想。

四色猜想的有限元法数字单元网格求解思想，是在把区域划分为有限个互不重叠的单元网格图板基础上，再对单元网格图板进行无穷小“细分”，单元网格极限趋点，单元网格内线面同一、曲直等价，“细分”满足多边形单元网格边缘逼近拼图封闭曲线，依然“且不会使相邻的两个区域得到相同的数字”。

四色猜想的有限元法数字单元网格的解，是指″四色″数字拼图路径边缘与图板数字单元网格“相异相邻”的存在。数字解的个数与拼图个数n相同或将n个拼图形成的封闭曲线段k（≤n）整合为一体数字解。

整合拼图形成的封闭曲线的线段图板单元网格是解的存在。标定拼图积分是对单元网格微分的验证，使拼图数字单元与图板数字单元相应“相异相邻”。

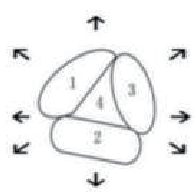
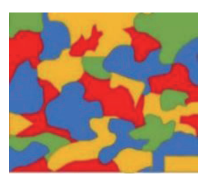


图1 定义示意图

四色猜想的有限元法数字单元网格求解过程：

1. 地图物理特征分析。寻求符合四色猜想定义、可用1、



2、3、4 数字标记的网格定义的地图物理特征图形——定义示意图。半坡人鱼盆、含山玉版文物等 △ ⧖ □ ✧ 四个符号中，三角形△（鱼标记）是最简洁的四色平面图形且△“1面3线”(1+3)4种组合、相异相邻、线面同一、对顶（盆口）、口形四方五位（盆中）、八角星形四方八位（盆沿）。用 1、2、3、4 数字标记的单元网格△、田、⊠（延伸四阶对称方阵）形特征，见证“史前数学”，启佑证明四色猜想的数学语言定义。

2. 建立图板单元网格表达式模型（6 种）。在单元网格图板表达式中，△形“1 面 3 线（1+3）”、田形二阶方阵单元网格，可直接由 1、2、3、4 数字进行标记。其模型意义具有代表性。这里仅用二阶方阵的田网格图板表达式，释解一般图板单元网格表达式模型含义。

$$S^2(⧖)=\sum_{k=1}^{n}\left(\leftarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1\\ \hline 4 & 3\\ \hline\end{array} \rightarrow\right)_k$$

①S（ ）“相异相邻、相同（异）对顶”边界条件、证明规则、求解。

② $\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1\\ \hline 4 & 3\\ \hline\end{array}$ “四方五（八）位”链锁无限，形成图板。

③Σ整合图板细分。图板范围内，叠加、链锁网格密度增加的细分总体。

3. 图板微分，网格趋点、数字依然相异相邻。根据边界条件形态，选择图板网格微分（细分）方法，有△内接细分、叠加细分、链锁细分三种。

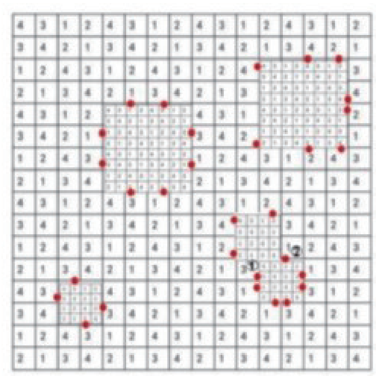
二阶、四阶对称方阵的 2n 个方阵数字单元，在相应表达式图板数字单元上叠加，属于无边界条件完美细分（见“四方九宫格表达式图板拼图”）。

4. 拼图积分，不会使相邻区域得到相同的数字。验证、整合得到拼图边缘数字解存在、不唯一，“事前”由数字通道标配控制封闭曲线，以适应相邻数字相对曲线段（以直代曲）。拼图“事后”由图板数字标定把关曲线段（以曲代直）。

5. 图板的动态性应用。由于区划变动等原因，会引起地图物理单元网格的再细分或合并变化。可返回 2 选用图板单元网格表达式模型重解。

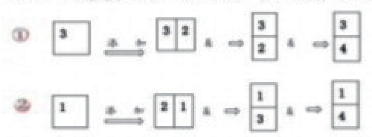
总之，图板拼图的有限元法是在微分图板上，经过拼图积分←→迭代→整合，实现数字解的过程。

以四阶对称方阵“四方五（八）位”链锁图板模型为例。（1）1、2、3、4 数字 24 种排列生成的四阶对称方阵口形单元网格，由三角形△元素构成。口形是△四色组合的简捷图形。数字单元网格“相异相邻、相同（异）对顶”是单元网格的边缘（界）条件特征。（2）四阶对称方阵单元网格“四方八（五）位”链锁表达式图板模型。每种色序可以有 24 种等价模型。（3）标配四阶对称方阵图板微分（选择细分方法）单元数字网格。验证多数字单元整合，整体数字“相异相邻”。如图中数字①②以及红点标注的是对拼图边缘与图板单元网格存在的“同色相邻”进行“改、对、合”，“任意地细分”结果可行。（4）标定拼图积分（封闭曲线图形略）边缘整合，与标配验证网格同框“且不会使相邻的两个区域得到相同的数字”边界解。拼图积分，把有限微分网格用曲线圈定式封闭，形成封闭曲线内单一拼图色。拼图色边缘与图板数字单元网格处于是否完全“相异相邻”状态，是对有限数字网格解存在的验证。



四阶对称方阵图板有限单元网格微分图

图中● 相邻单元整合标记“拆改、对顶、合并”实现相异。对于①②，结合“添加细分”修正图板，如下：



整体封闭折线形成后，一次性“相异相邻”整合即可。

“相异相邻、相同（异）对顶”是整合规则。特别注意的是，当拼图整体封闭折线形成后，一次性整合最简捷，无需对图板拼图逐一进行整合（见“四方九宫格表达式图板拼图”）。

有限元法数字单元网格，既是微分把图板无穷分割；也是积分把微分后的无数无限小数字单元重新集合成一个整体的整合，最终得到四色猜想的有限元法单元网格的整体数字解。

四、任意细分图板的微分，与拼图曲线任意的积分。

图板“任意地细分”（网格单元趋点），形成原始图板。由于地图区域分解、合并等变化，在原始图板拼图的基础上需相应变更拼图。这就有了拼图图板。

“相异相邻、相同（异）对顶”规则，使“四方八（五）位”链锁的图板数字单元网格结构保持不变。在于进行数字单元图板拼图状态分析时，求解结果仅是针对封闭曲线边缘的边界条件，只要边界条件满足表达式图板求解要求，就能得到正确求解结果。特别是多次拼图整合，涉及图板、拼图同时满足边界条件。

“相异相邻、相同（异）对顶”，给定了表达式图板边界条件。在对数字单元图板进行“任意地细分”、微分或进行拼图时，边缘曲线上会出现相邻数字单元“相同”状态，这必须进行“拆改、对顶、合并”，才能“且不会使相邻的两个区域得到相同数的字”。图板上拼图整合，是仅在封闭曲线的线段上显示求解结果，也能“且不会使相邻的两个区域得到相同的数字”。

任意地细分、微分方式。（1）图板细分、微分：△图板的△内接细分（△对顶重组）、叠加细分（2n个方阵的对应叠加）、链锁细分（范围内方阵加密）；（2）拼图细分、微分：添加细分、迭代细分。

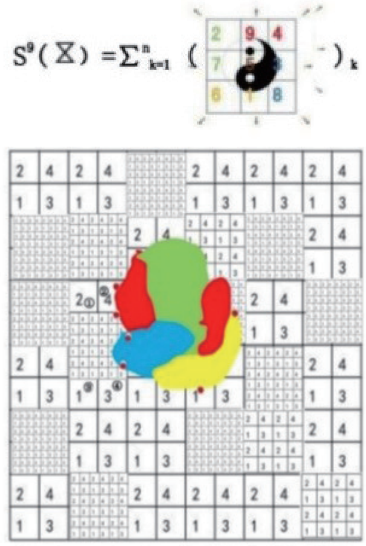
1. 重组细分。用△ 1 面 3 线重组对顶三角形，连续实现内接三角形，图板△单元由“面”无穷小趋向极限点。适用于△“1 面 3 线”表达式图板。

2. 叠加细分。在二阶方阵数字单元上叠加由二阶方阵组成的 2n（n=2、3、4……）个方阵单元可以实现“任意地细分”。四方九宫格图板与二阶方阵图板同等。

叠加细分的单元区域可以不均匀分布，若 2n 个方阵单元非在相应表达式图板的数字单元上叠加，则属于有边界条件细分。

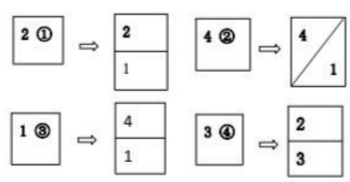
二阶方阵的2n（n=2、3、4……）个方阵细分方法，也适用于四阶对称方阵单元图板、△“1 面 3 线”⊠组合单元图板的“叠加细分”，在“四方九宫格表达式图板拼图”（二阶方阵）图中，用①②③④，以及红点标注的“同色相邻”数字网格，是对拼图边缘与图板单元网格按照“相异相邻、相同（异）对顶”规则进行“拆改、对顶、合并”方式，整合验证解结果全部正确的操作。不同的“改、对、顶”方式，会使网格单元标记数字不同，数字解结果不唯一。

3. 链锁细分。链锁是“任意地细分”的图板来历，但相对单元范围来看，链锁蕴含细分。在容量有限的区域内，链锁二阶方阵使其单元密度增加，且均匀分布于图版。链锁细分适用于△“1 面 3 线”表达式图板、△“1 面 3 线”组合⊠表达式图板、四阶对称方阵表达式图板、四方九宫格图板，以及二阶、三阶子阵图板。



四方（1⑥2⑦3⑧4⑨）九宫格表达式图板拼图

图中●相邻单元整合标记，“拆改、对顶、合并”实现相异。对于①②③④则



4. 添加细分。在图板拼图过程中，进行添加拼图。

5. 迭代细分。拼图过程中迭代，即在初始拼图图板上进行再次、连续细分拼图，迭代标定得到新图板。拼图迭代动态性，决定了迭代次数无限。

图板拼图的数字单元细化重组与合并重组，是个同存、微积互逆概念。拼图“事后”由图板数字标定把关曲线段（以曲代直）；“事前”由数字通道标配控制封闭曲线，以适应相邻数字相对曲线段（以直代曲）。

“事后”（以曲代直）图板标定拓变，然而拼图曲线的任意性可取代拓扑等价来刻画图板微分，与“事前”（以直代曲）数字通道标配相结合，是

精准图板拼图的保证。

五、四色猜想为什么要引入有限元法。

四色猜想定义的“任意地细分”数字单元图板拼图“相异相邻、相同（异）对顶”是证明关键。四色猜想的图板微分（无限细分）、任意拼图积分，解决了图论、拓扑学、计算机证明中的“无限”“飞地”困惑；拼图曲线任意性，可取代拓扑等价来刻画图板微分。结论是四色猜想属于数学分析概念。那么，为什么又要引入有限元法呢？

一是，在于利用有限元法的边界条件概念，增加细分方法通用性，以适用于各个数字单元表达式图板模型。特别是对“叠加细分”边界条件的剖析。

二是，在于进行数字单元图板拼图状态分析时，求解结果针对的是封闭曲线边缘的边界条件，只要边界条件满足表达式图板求解要求，就能得到正确求解答案。特别是多次拼图的整合，涉及图板、拼图同时满足边界条件。

三是，“相异相邻、相同（异）对顶”，给定了表达式图板边界条件。在对数字单元图板进行“任意地细分”、微分或进行拼图时，边缘曲线上会出现相邻数字单元“相同”状态，这必须进行“拆改、对顶、合并”，实现“且不会使相邻的两个区域得到相同的数字”。图板拼图整合，是仅在封闭曲线的线段上显示求解结果，也才“且不会使相邻的两个区域得到相同的数字”（见“四阶对称方阵图板有限单元网格微分图”）。

“拆改、对顶、合并”是用微分（拆分）、积分（合并）概念来刻画四色猜想（定义的△ 1 面 3 线对顶链锁）图板“任意地细分”与拼图数字解。

二阶、四阶方阵的 2n 个方阵，在相应表达式图板数字单元上叠加，属于无边界条件细分；而 2n 个方阵若非在相应表达式图板的数字单元上叠加，属于有边界条件细分，存在着适用单一、连续“拆改、对顶、合并”图板边缘数字单元，以及同用其他细分方法限制相邻区域“相同”。在“四阶对称方阵图板有限单元网格微分图”中所示四阶对称方阵叠加细分，适用“拆改”的同时，同用“添加细分”，直至“且不会使相邻的两个区域得到相同的数字”的拼图数字解。